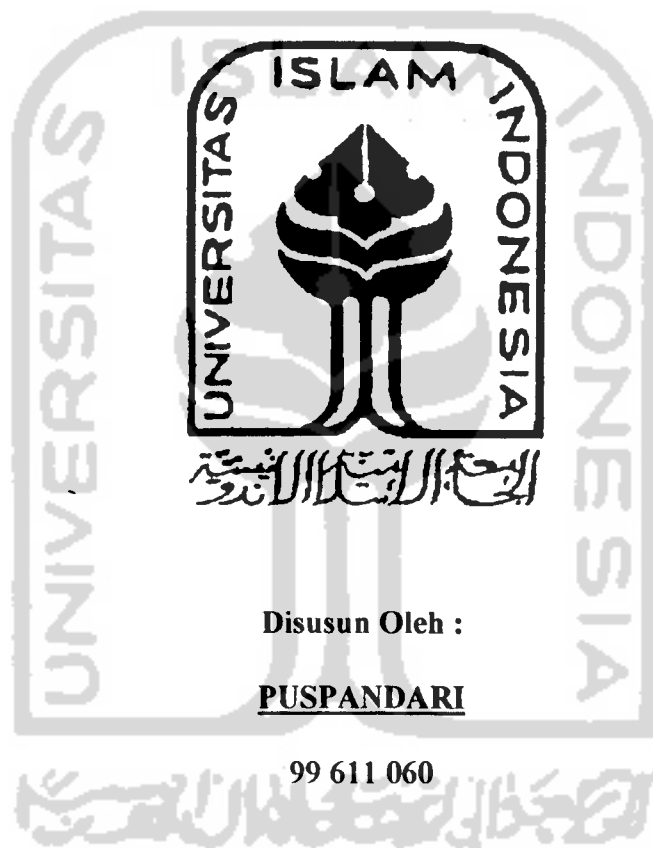


SUSUNAN KERANGKA KERJA
METODE PERMUKAAN RESPON UNTUK PERENCANAAN
OPTIMALISASI

Skripsi



Disusun Oleh :

PUSPANDARI

99 611 060

JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA
YOGYAKARTA

2004

SUSUNAN KERANGKA KERJA
METODE PERMUKAAN RESPON UNTUK PERENCANAAN
OPTIMALISASI



JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA
YOGYAKARTA
2004

LEMBAR PENGESAHAN PEMBIMBING

Susunan Kerangka Kerja Metode Permukaan Respon
Untuk Perencanaan Optimalisasi

Skripsi

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Menempuh Gelar Sarjana
Jurusan Statistika

Disusun oleh :

Nama : Puspandari

No. Mhs : 99 611 060

Telah Disyahkan dan Disetujui Oleh Dosen Pembimbing Pada :

Hari :

Tanggal :

Mengetahui

Ketua Jurusan

(Rohmatul Fajriyah, M. Si)

Dosen Pembimbing

(Edy Widodo, M.Si)

LEMBAR PENGESAHAN PENGUJI

Susunan Kerangka Kerja Metode Permukaan Respon
Untuk Perencanaan Optimalisasi

Skripsi

Disusun oleh :

Nama : Puspandari

No Mhs : 99 611 060

Telah dipertahankan di Depan Sidang Penguji Sebagai Salah Satu Syarat Untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Statistika.

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Islam Indonesia

Yogyakarta, 5 Maret 2004

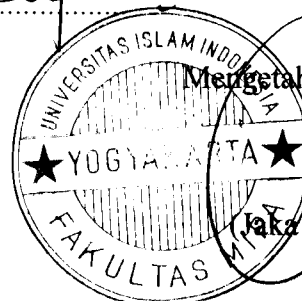
Tim Penguji :

Jaka Nugraha, M.Si
Ketua

Edy Widodo, M.Si
Anggota I

Sugiyarto, M.Si
Anggota II

Kariyam, M.Si
Anggota III



Mengetahui Dekan FMIPA UII

(Jaka Nugraha, M.Si)



Untuk Agama

Ayahanda dan Ibunda tercinta

Mas Gun dan Kakak Ricky tersayang

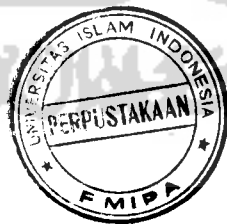
MOTTO

Sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatupun.

Dan berbuat baiklah kepada dua orang ibu-bapa, karib kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, teman sejawat, ibnu sabil dan hamba sahayamu.

Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang sombong dan membangga-banggakan diri.

[QS. An Nisaa' : 36]



KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Alhamdulillah, berkat rahmat Allah SWT semata penyusun dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Susunan kerangka kerja Metode Permukaan Respon untuk perencanaan optimalisasi” dengan lancar.

Pada kesempatan ini penyusun ingin mengucapkan terima kasih kepada Bapak Edy Widodo, M.Si yang telah membimbing mulai dari penyusunan proposal sampai akhir penulisan skripsi ini. Kebaikan, ketelitian, dan kesabaran beliau dalam membimbing dan mengarahkan sungguh merupakan suatu pelajaran yang tak ternilai.

Selain itu penyusun juga ingin mengucapkan terima kasih kepada beberapa pihak yang membantu dalam menyelesaikan skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung. Ucapan terima kasih ditujukan antara lain kepada :

1. Bapak Jaka Nugraha, M.Si, selaku Dekan Fakultas MIPA UII.
2. Ibu Rohmatul Fajriyah, M.Si, selaku Ketua Jurusan Statistika Fakultas MIPA UII.
3. Seluruh Dosen Fakultas MIPA, yang telah memberikan ilmu dan mengajarkan banyak hal pada penyusun.
4. Seluruh Staf Perpustakaan Pusat UII yang telah banyak membantu dalam memperoleh literatur.
5. Ayahanda dan Ibunda tercinta yang selalu memberi do`a restunya.

6. Kakak Ricky tersayang yang selalu memberi motivasi.
7. Teman-teman Angkatan “99.
8. Semua pihak yang turut mendukung, baik secara langsung maupun tidak langsung, hingga terwujudnya skripsi ini.

Sebagai karya sederhana pribadi ini masih terdapat banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penyusun mohon maaf dan untuk kesempurnaannya penyusun sangat mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun.

Akhir kata penyusun berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi kita semua.

Amin....

Wassalamu’alaikum Wr. Wb.

Yogyakarta, Februari 2004

Penyusun

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN PEMBIMBING	ii
LEMBAR PENGESAHAN PENGUJI	iii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iv
MOTTO	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR GAMBAR	xii
ABSTRAKSI	xiii
 BAB I. PENDAHULUAN	 1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	7
1.3. Tujuan Penelitian	8
1.4. Manfaat Penelitian	8
1.5. Metodologi Penelitian	8

BAB II. LANDASAN TEORI	10
2.1. Analisis Regresi	10
2.2. Metode Kuadrat Terkecil	11
2.3. Matriks Aljabar	14
2.3.1. Determinan	15
2.3.2. Nilai Eigen	15
2.3.3. Bentuk Kuadrat	17
2.4. Analisis Kanonik	18
2.4.1. Bentuk Kanonik A (The A Canonical Form)	18
2.4.2. Aplikasi Bentuk Kanonik A dan B	22
BAB III. METODE PERMUKAAN RESPON	27
3.1. Dasar Permukaan Respon	27
3.2. Metode Pendakian Lintas Tercuram	30
BAB IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN	34
4.1. Susunan Kerangka Kerja	34
4.1.1. Model Orde Pertama	34
4.1.2. Memecahkan Kecukupan Model Orde Pertama	37
4.1.3. Steepest Ascent/Descent	38
4.1.4. Model Orde Kedua	39
4.1.5. Memecahkan Kecukupan Model Orde Ke dua	40
4.1.6. Melakukan Analisis Kanonik	40

4.1.9. Melakukan Analisis Ridge	42
4.1.10. Penerimaan Nilai Titik Stasioner	42
4.2. Studi Kasus	42
 BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN	 58
5.1. Kesimpulan	58
5.2. Saran – saran	58

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN



DAFTAR GAMBAR

1. Gambar 1. Kontur permukaan respon : Lingkaran	27
2. Gambar 2. Kontur permukaan respon : Gundukan	28
3. Gambar 3. Kontur permukaan respon : Depresi	28
4. Gambar 4. Kontur permukaan respon : Bukit Timbul	28
5. Gambar 5. Kontur permukaan respon : Pelana	28
6. Gambar 6. Susunan kerangka kerja optimasi algoritma RSM	35



ABSTRAKSI

Metode Permukaan Respon belum banyak diketahui oleh masyarakat pada umumnya. Dan Metode Permukaan Respon ini sangat baik digunakan karena dapat membantu dalam berbagai pemecahan masalah sains dan teknik. Namun perlu dilakukan rencana kerja terlebih dahulu untuk mendapatkan kondisi optimum yang diinginkan.

Dalam penelitian dengan judul “Susunan kerangka kerja Metode Permukaan Respon untuk perencanaan optimalisasi” bertujuan (1) memperkenalkan secara lebih umum Metode Permukaan Respon, (2) memahami susunan kerangka kerja dalam mengoptimasi model perencanaan menggunakan Metode Permukaan Respon.

Analisis dilakukan dengan data-data sekunder yang diperlukan dan studi kepustakaan yang dilakukan untuk mendapatkan gambaran mengenai teori-teori dan konsep yang kokoh dan mendasar tentang permasalahan penelitian sehingga hasil yang didapatkan akan bersifat ilmiah.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa susunan kerangka kerja dengan Metode Permukaan Respon sangat baik jika dilakukan karena dapat membantu untuk mengoptimalkan model perencanaan.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Secara umum Metode Permukaan Respon atau *Response Surface Methodology* (RSM) pada dasarnya adalah kumpulan dari metode matematika dan statistika yang digunakan untuk membantu dalam pemecahan berbagai tipe masalah yang berhubungan dengan proses sains dan teknik. Metode Permukaan Respon adalah kumpulan dari metode matematika dan statistik yang digunakan untuk mengoptimasi fungsi stokastik (Myers dan Montgomery, 1995). Metode Permukaan Respon sering digunakan untuk mengoptimasi model perencanaan stokastik (Fu 1994, Carson dan Maria 1997, Kleijnen 1998). Metode ini memperkirakan fungsi objek stokastik oleh polinomial rendah dalam sub bagian kecil yang luas.

Pengaruh yang kuat dari Metode Permukaan Respon dalam penyelesaian masalah-masalah terutama pada fase optimasi. Dalam buku *Sudjana, 2002, (hal 367)* diberikan contoh tentang Metode Permukaan Respon yaitu percobaan pada semacam plastik tembus pandang yang akan disemprot menggunakan penyemprot jenis tertentu dengan hasil semprotan masih tetap membuat plastik itu tembus pandang. Semprotan mempunyai konsentrasi zat warna yang dipilih (x_1), sedangkan plastik yang disemprot pada posisi (x_2) tertentu. Lapisan sebagai hasil semprotan akan mengurangi daya pandang apabila lapisan itu makin tebal. Percobaan dilakukan dengan tujuan warna permukaan plastik seperti warna yang dipilih tadi, tetapi daya pandang harus maksimum/optimal

Untuk mengetahui lebih dalam tentang Metode Permukaan Respon, perlu juga diketahui tentang :

1. Rancangan Percobaan. Vincent, 1995, (hal 7)

Pada dasarnya rancangan percobaan merupakan pengaturan pemberian perlakuan kepada satuan-satuan percobaan dengan maksud agar keragaman respons yang ditimbulkan oleh keadaan lingkungan dan heterogenitas bahan percobaan yang digunakan dapat diterima atau tidak diterima. Macam-macam rancangan percobaan baku (standar) yang disusun, misalnya: rancangan acak lengkap, rancangan acak kelompok, rancangan bujursangkar latin, dan sebagainya.

2. Rancangan Respons. Vincent, 1995, (hal 8-9)

Perancangan respons menyangkut pemilihan sifat atau karakteristik satuan percobaan yang akan digunakan untuk menilai atau mengukur pengaruh perlakuan serta bagaimana cara melakukan penilaian atau pengukuran itu. Hal yang perlu diperhatikan ialah apakah sifat atau karakteristik yang dipilih itu memang relevan dan dapat mencerminkan pengaruh berbagai perlakuan yang dipelajari.

Jika respons yang akan digunakan untuk menilai pengaruh perlakuan berupa sifat-sifat fisik, kimia, atau morfologi seperti misalnya tinggi tanaman, berat badan, produksi, kadar protein, dan lain-lain, maka pengukurannya biasanya dapat dilakukan secara obyektif serta alat-alat pengukur sudah tersedia. Tetapi bila respons yang diperhatikan berupa tingkah laku, fungsi suatu organ atau individu, ketahanan terhadap penyakit,

pengukurannya bersifat subyektif serta pedoman pelaksanaan pengukuran belum baku.

Untuk menilai atau mengukur suatu sifat atau karakteristik, dapat dibedakan empat macam skala pengukuran :

a. Skala nominal .

Adalah data yang diperoleh dengan cara kategorisasi atau klasifikasi.

Contoh : jenis pekerjaan.

- pegawai negeri diberi tanda 1
- pegawai swasta diberi tanda 2

b. Skala ordinal.

Adalah data yang diperoleh dengan cara kategori, tetapi diantara data tersebut terdapat hubungan.

Contoh : kepuasan pelanggan.

- sangat puas : 1
- puas : 2
- cukup puas : 3
- tidak puas : 4
- sangat tidak puas : 5

c. Skala interval atau selang.

Adalah data yang diperoleh dengan cara pengukuran, dimana jarak dua titik pada skala sudah diketahui.

Contoh : temperatur suatu ruangan.

Untuk air membeku dan mendidih : 0°C sampai 100°C .

d. Skala rasio.

Adalah data yang diperoleh dengan cara pengukuran, dimana jarak dua titik pada skala sudah diketahui, dan mempunyai titik 0 yang absolut/nol mutlak.

Contoh : jumlah buku di kelas.

Jika 5 berarti ada 5 buku.

Jika 0 berarti tidak ada buku sama sekali.

(absolut, benar-benar 0).

3. Prinsip utama dari perancangan percobaan. Vincent, 1995, (hal 10-13)

Prinsip utama dari perancangan percobaan merupakan gagasan dasar dari R.A. Fisher dan F. Yates dari stasiun percobaan Rothamsted, London, Inggris. Prinsip-prinsip itu adalah :

a. Pengacakan (*Randomized*).

Fungsi dari pengacakan adalah menjamin kesahihan (*validity*) atas pendugaan tak bias dari galat percobaan dan nilai tengah perlakuan serta perbedaannya.

b. Pengulangan (*Replication*).

Bila suatu perlakuan muncul lebih dari satu kali dalam suatu percobaan, maka dikatakan perlakuan itu mempunyai *ulangan*.

Fungsi dari pengulangan adalah :

- ❖ Memberikan suatu dugaan dari galat percobaan.
- ❖ Meningkatkan ketelitian suatu percobaan melalui pengurangan simpangan baku dari nilai tengah perlakuan.

- ❖ Memperluas cakupan penarikan kesimpulan dari suatu percobaan.
- ❖ Mengendalikan ragam galat (*error variance*).

c. Pengendalian Lokal (*Local control*).

Suatu teknik untuk mengurangi galat percobaan adalah menentukan perlakuan pada petak percobaan dengan cara sedemikian rupa sehingga keragaman yang ada di antara petak-petak percobaan atau satuan-satuan percobaan tidak 'masuk ke dalam' perbedaan di antara perlakuan-perlakuan. Teknik ini biasanya dinamakan "pengendalian lokal".

4. Langkah-langkah dalam merancang suatu percobaan. *Vincent, 1995, (hal 18-19)*

Menurut Kempthorne (1952) dalam Ostle dan Mensing (1975) secara statistika, perancangan suatu percobaan dan mengikuti langkah-langkah berikut :

1. Pernyataan masalah dari masalah yang dihadapi.
2. Perumusan hipotesis.
3. Penentuan teknik dan rancangan percobaan.
4. Pemeriksaan semua hasil yang mungkin dan latar belakang penelitian secara hati-hati sehingga percobaan dapat memberikan informasi yang diperlukan secara tepat.
5. Mempertimbangkan semua hasil yang mungkin ditinjau dari prosedur statistika yang akan diterapkan untuk menjamin terpenuhinya syarat-syarat yang diperlukan sehingga prosedur tersebut sah dan memuaskan.

6. Melakukan percobaan.
7. Menerapkan teknik statistika pada hasil percobaan.
8. Menarik kesimpulan dengan mengukur kepercayaan dari dugaan terhadap suatu besaran yang dinilai, mempertimbangkan secara hati-hati kesahihan dari kesimpulan untuk populasi dari obyek atau kejadian.
9. Mengevaluasi penelitian secara keseluruhan dan membandingkannya dengan penelitian lain pada masalah yang sama atau serupa.

Disamping itu perlu pula diketahui tentang model. Dalam buku *Simatupang, 1994, (hal 1, 3, 5)* pada umumnya kata “model” didefinisikan sebagai suatu representasi atau formalisasi dalam bahasa tertentu (yang disepakati) dari suatu sistem nyata. Adapun sistem nyata adalah sistem yang sedang berlangsung dalam kehidupan, sistem yang dijadikan titik perhatian dan dipermasalahkan. Dengan demikian pemodelan adalah proses membangun atau membentuk sebuah model dari suatu sistem nyata dalam bahasa formal tertentu.

Ackoff, Gupta, dan Minas (1962) mencatat bahwa pengertian model dapat dipandang dari tiga jenis kata. Sebagai kata benda, model berarti representasi (gambaran, perwakilan, atau perlambangan), misalnya miniatur pesawat terbang N-250 adalah model pesawat yang sebenarnya. Model sebagai kata sifat berarti ideal (idaman, teladan, contoh, atau cita-cita). Model sebagai kata kerja berarti memperagakan, mempertunjukkan, atau memamerkan. Dalam pemodelan, model dirancang sebagai penggambaran operasi dari suatu sistem nyata secara ideal guna menjelaskan atau menunjukkan hubungan-hubungan penting yang terlibat. Murthy, Page, dan Rodin (1990) menyatakan bahwa model adalah suatu representasi yang

memadai dari suatu sistem. Model itu disebut memadai jika telah sesuai dengan tujuan dalam pikiran analis (pemodel). Murthy menambahkan bahwa membangun model dapat dipandang sebagai proses pemilihan representasi yang tepat dan memadai dari suatu sistem nyata. Murdick, Ross, dan Claggett (1984) menyatakan bahwa model adalah aproksimasi atau penyimpulan (*abstraction*) dari sistem nyata yang dapat disusun dalam berbagai bentuk. Geoffrey Gordon (1987) mendefinisikan model sebagai kerangka utama informasi (*body of information*) tentang sistem yang dikumpulkan untuk mempelajari sistem tersebut. Isa S. Toha (1990) mengemukakan bahwa model adalah penampilan elemen-elemen terpenting dari persoalan sistem nyata.

1.2. Rumusan Masalah

Dari uraian latar belakang diatas dapat diperoleh rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana menentukan kondisi optimum menggunakan Metode Permukaan Respon ?
2. Bagaimana susunan kerangka kerja dalam mengoptimasi model perencanaan menggunakan Metode Permukaan Respon ?



1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan diadakannya penulisan ini adalah :

- a. Menentukan kondisi optimum menggunakan Metode Permukaan Respon.
- b. Memahami susunan kerangka kerja dalam mengoptimasi model perencanaan menggunakan Metode Permukaan Respon.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini adalah :

1. Bagi peneliti, selain dapat menambah pengetahuan juga merupakan syarat yang harus ditempuh guna memperoleh derajat Sarjana di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Islam Indonesia.
2. Secara teoritis diharapkan dapat mengetahui sejauh mana teori-teori yang diperoleh dikampus dapat digunakan atau dipraktekkan kedunia kerja yang sesungguhnya.
3. Secara kongkrit dapat dijadikan sebagai referensi.

1.5. Metodologi Penelitian

Studi kepustakaan.

Dilakukan untuk mendapatkan gambaran mengenai teori-teori dan konsep yang kokoh dan mendasar tentang permasalahan penelitian sehingga hasil yang didapatkan akan bersifat ilmiah. Dengan memanfaatkan literatur-literatur kepustakaan sebagai bahan untuk mendapatkan informasi.

Literatur utamanya adalah Jurnal “ Susunan kerangka kerja Metode Permukaan Respon untuk perencanaan optimalisasi “ oleh H. Gonda Neddermeijer, Gerrit J, Van Oortmarssen dan Nanda Piersma Rommert Dekker, 3000 DR Rotterdam The Netherlands.

Dalam studi pustaka ini juga mencari data-data sekunder yang diperlukan.



BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. Analisis Regresi . *Algifari, 1997, (hal 1-3)*

Analisis regresi merupakan suatu model matematis yang dapat digunakan untuk mengetahui pola hubungan antara dua atau lebih variabel. Tujuan utama analisis regresi adalah untuk membuat perkiraan nilai suatu variabel (variabel dependen) jika nilai variabel yang lain yang berhubungan dengannya (variabel independen) sudah ditentukan (diketahui). Hubungan antara variabel dependen dengan variabel independen ini dapat dirumuskan ke dalam suatu bentuk hubungan fungsional sebagai berikut :

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

yang menyatakan bahwa -

Y adalah variabel dependen

$x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel independen

variabel dependen adalah variabel yang nilainya tergantung dari nilai variabel lain, sedangkan variabel independen adalah variabel yang tidak tergantung variabel lain. Sebagai contoh : Jika biaya promosi meningkat (x), maka nilai penjualan (Y) akan meningkat.

2.2. Metode Kuadrat Terkecil. Widodo, 2000, (hal 26-27)

Diberikan fungsi respon sebagai berikut :

$$\eta = X\beta \quad \dots\dots\dots(2.6.1)$$

dimana X diasumsikan full rank p dan $X'X$ adalah definit positif dan *invertible*.

Andaikan $\hat{\beta}$ menyatakan estimasi vektor yang diberikan oleh persamaan normal

$$(y - \hat{y})X = 0 \quad \dots\dots\dots(2.6.2)$$

sedemikian hingga

$$(y - X\hat{\beta})X = 0 \quad \dots\dots\dots(2.6.3)$$

Selanjutnya dibentuk fungsi jumlah kuadrat sebagai berikut :

$$\begin{aligned} S(\beta) &= (y - \eta)'(y - \eta) \\ &= (y - \hat{y})'(y - \hat{y}) + (\hat{y} - \eta)'(\hat{y} - \eta) \quad \dots\dots\dots(2.6.4) \end{aligned}$$

Selanjutnya

$$S(\beta) = S(\hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})'X'X(\beta - \hat{\beta}) \quad \dots\dots\dots(2.6.5)$$

karena $X'X$ adalah definit positif, $S(\beta)$ akan minimum bilamana $\beta = \hat{\beta}$.

Sehingga solusi persamaan normalnya adalah :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \quad \dots\dots\dots(2.6.6)$$

Tabel 2.1 Tabel Analisis Varians untuk kasus regresi secara umum.

Sumber	Derajat bebas	Jumlah Kuadrat
fungsi respon	p	$\left \hat{y} - \eta \right ^2 = (\hat{\beta} - \beta)' X' X (\hat{\beta} - \beta)$ $\left y - \eta \right ^2 = \sum (y - \hat{y})^2$
galat	n-p	
Total	n	$\left y - \eta \right ^2 = \sum (y - \eta)^2$

Sumber : Box, G.E.P and Draper, N.R, (1987). *Empirical Model Building and Response Surface*, hal. 63

Uji lack-of-fit. Draper, hal 92.

Langkah-langkah uji hipotesis :

1. Menentukan hipotesis.
2. Menentukan tingkat signifikansi (α).
3. Menentukan daerah penolakan hipotesis.

Jika $F_{hitung(n-p-ne),ne} < F_{tabel(n-p-ne),ne, 1-\alpha}$, maka H_0 ditolak.

Jika $F_{hitung(n-p-ne),ne} \geq F_{tabel(n-p-ne),ne, 1-\alpha}$, maka H_0 diterima.

4. Menentukan statistik uji :

$$\left[\frac{SS(lack - of - fit)/(n - p - n_e)}{SS(pure error)/n_e} \right]$$

keterangan:

SS(lack-of-fit) = jumlah ketidakpasan model.

SS(pure error) = jumlah kuadrat galat murni.

n = jumlah pengamatan.

p = jumlah perlakuan.

n_e = derajat bebas galat murni.

Uji persamaan regresi menyeluruh. Draper, (hal 93).

Langkah-langkah uji hipotesis :

1. Menentukan hipotesis.
2. Menentukan tingkat signifikansi (α).
3. Menentukan daerah penolakan hipotesis.

Jika $F_{hitung} < F_{tabel(p-1, n-p)}$, maka H_0 ditolak.

Jika $F_{hitung} \geq F_{tabel(p-1, n-p)}$, maka H_0 diterima.

4. Menentukan statistik uji :

$$\left[\frac{SS(R|b_0)/(p-1)}{s^2} \right]$$

keterangan:

$SS(R|b_0)$ = jumlah kuadrat galat regresi.

s = standar deviasi.

p = jumlah perlakuan.

Uji koefisien regresi. Algifari, 1997, (hal 22) .

Langkah-langkah uji hipotesis :

1. Menentukan hipotesis.
2. Menentukan tingkat signifikansi (α).
3. Menentukan daerah penolakan hipotesis.

Jika $t_{hitung} < t_{tabel}$, maka H_0 diterima.

Jika $t_{hitung} \geq t_{tabel}$, maka H_0 ditolak.

4. Menentukan statistik uji :

$$t_{\text{hitung}} = \frac{b - \beta}{S_b}$$

keterangan:

b = slope garis estimasi yang paling baik.

β = parameter model.

S_b = kesalahan standar koefisien regresi.

2.3. Matriks Aljabar

Menurut *Howard Anton, 1987, (hal 22-23)* matriks didefinisikan sebagai berikut :

*Sebuah **matriks** adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan.*

*Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan **entri** dalam matriks.*

Matriks $m \times n$ yang umum dapat dituliskan sebagai

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } [b_{ij}]_{m \times n}$$

Contoh 11

Tinjau matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$A \neq C$ karena A dan C tidak mempunyai ukuran yang sama. Karena alasan yang sama maka $B \neq C$. Juga $A \neq B$ karena tidak semua entri yang bersesuaian sama.

2.3.1. Determinan. Howard Anton, 1987, (hal 63)

Definisi : Misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh $\det$, dan didefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A . Jumlah $\det(A)$ dinamakan determinan A .

Contoh 8

1. Hitunglah determinan-determinan dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

$$\det(B) = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$

2.3.2. Nilai Eigen. Howard Anton, 1987, (hal 277-279)

Definisi : Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam $\mathbb{R}^n$ dinamakan **vektor eigen (eigenvector)** dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x ; yakni, $Ax = \lambda x$ untuk skalar λ . Skalar λ dinamakan **nilai eigen (eigenvalue)** dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Contoh 1

Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan nilai

$$\text{eigen } \lambda = 3 \text{ karena } Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

2.3.3. Bentuk Kuadrat. Widodo, 2000, (hal 21-22)

Definisi 2.2.9 : Bentuk kuadrat dari $x_1, x_2, \dots, x_n$ dapat ditulis sebagai $\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x}$ dengan $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n)'$ dan $\mathbf{B} =$ matrik simetris $n \times n$

Definisi 2.2.10 (Jin Ho Kwak dan Sungpyo Hong, 1987, hal. 295)

Matrik $\mathbf{B}$ dikatakan

1. definit positif, jika $\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} > 0$, untuk semua $\mathbf{x} \neq 0$
2. semidefinit positif, jika $\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} \geq 0$, untuk semua $\mathbf{x}$
3. definit negatif, jika $\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} < 0$, untuk semua $\mathbf{x} \neq 0$
4. semidefinit negatif, jika $\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} \leq 0$, untuk semua $\mathbf{x}$
5. indefinite, jika $\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x}$ bisa positif atau negatif

Teorema 2.2.11 : Matrik simetrik $\mathbf{B}$ adalah definit positif jikadann hanya jika semua nilai λ matrik $\mathbf{B}$ adalah positif

Bukti : (lihat Howard Anton, 1994, hal. 478)

Contoh 2.7 :

Diberikan matrik $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrik $\mathbf{A}$ adalah definit positif karena

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dituliskan kembali

$Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda Ix$$

atau secara ekivalen $(\lambda I - A)x = 0 \dots\dots\dots(6.1)$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan ini, maka persamaan (6.1) akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Ini dinamakan *persamaan karakteristik A* ; skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A . Bila diperluas, maka determinan $\det(\lambda I - A)$ adalah polinom λ yang dinamakan *polinom karakteristik* dari A

Contoh 2

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pemecahan. Karena

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

maka polinom karakteristik dari A $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

dan persamaan karakteristik dari A adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

Pemecahan-pemecahan persamaan ini adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$; inilah nilai-nilai eigen dari A .

$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$$

kecuali jika $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Selanjutnya Jin Ho Kwak dan Sungpyo Hong, (1987, hal. 295) menyatakan, diberikan suatu bentuk kuadrat $q(x) = x'Bx$ dengan titik kritis hanya pada titik nol dan $q(0) = 0$ adalah minimum jika B definit positif, maksimum jika B definit negatif dan B indefinit maka 0 adalah titik sadel.

2.4. Analisis Kanonik. Widodo, 2000, (hal. 5)

Analisis kanonik adalah metode penulisan kembali model orde dua yang telah dicocokkan ke dalam bentuk yang lebih mudah dimengerti. Hal ini dapat diperoleh dengan merotasikan sumbu, sedemikian hingga semua suku *cross product* dapat diabaikan atau dipindahkan. Penyederhanaan ini disebut dengan Bentuk Kanonik A (*A Canonical Form*). Jika diinginkan, bentuk kanonik A masih mungkin disederhanakan, yaitu dengan merubah/memindahkan suku order pertama secara sempurna. Hasil ini selanjutnya dikenal dengan Bentuk kanonik B (*B Canonical Form*).

2.4.1. Bentuk Kanonik A (*The A Canonical Form*). Widodo, 2000, (hal 5-8)

Diberikan model orde dua yang telah dicocokkan sebagai berikut :

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i \geq j} \beta_{ij} x_i x_j \quad \dots\dots\dots (2.1.1)$$

atau dalam bentuk matrik

$$y = \beta_0 + x \beta + x' \beta x \quad \dots\dots\dots (2.1.2)$$



dimana : $\hat{B} \hat{d}_i = \hat{d}_i \hat{\lambda}_i = 1, 2, 3, \dots, k$ (2.1.3)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}; \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} \text{ dan } \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{11} & \frac{1}{2} \hat{\beta}_{12} & \dots & \frac{1}{2} \hat{\beta}_{1k} \\ \frac{1}{2} \hat{\beta}_{12} & \hat{\beta}_{22} & \dots & \frac{1}{2} \hat{\beta}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} \hat{\beta}_{1k} & \frac{1}{2} \hat{\beta}_{2k} & \dots & \hat{\beta}_{kk} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya didefinisikan bahwa

$$\hat{B} \hat{d}_i = \hat{d}_i \hat{\lambda}_i = 1, 2, 3, \dots, k$$
(2.1.4)

dimana $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, \dots, \hat{\lambda}_k$ menyatakan nilai eigen dari matrik simetri $\hat{B}$ dan $\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, \dots, \hat{d}_k$ vektor eigen yang bersesuaian.

Jika masing-masing vektor eigen distandarkan, sedemikian hingga $\hat{d}_i, \hat{d}_i = 1$

dan $\hat{d}_i$ merupakan kolom ke-i dari matrik $\hat{D}$, maka k persamaan (2.1.3) secara simultan dapat ditulis

$$\hat{B} \hat{\Lambda} = \hat{D} \hat{\Lambda}$$
(2.1.4)

dimana $\hat{\Lambda}$ adalah matrik diagonal dengan elemen diagonal ke-i adalah $\hat{\lambda}_i$ dan

$\hat{D} = \begin{bmatrix} \hat{d}_1 & \hat{d}_2 & \dots & \hat{d}_k \end{bmatrix}$ adalah matrik orthogonal. Karena $\hat{D}$ orthogonal

maka, $\hat{D}' \hat{D} = I = \hat{D} \hat{D}'$ sehingga persamaan (2.1.4) menjadi

$$\hat{D}' \hat{B} \hat{D} = \hat{\Lambda}$$
(2.1.5)

Karena $\hat{D}' \hat{D} = I$, persamaan (2.1.2) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + (\hat{x}' \hat{D})(\hat{D}' \hat{\beta}) + (\hat{x}' \hat{D}) \hat{D}' \hat{B} \hat{D} (\hat{D}' \hat{x}) \dots\dots\dots(2.1.6)$$

Jika sekarang didefinisikan

$$z = \hat{D}' \hat{x} \quad \text{dan} \quad \hat{\theta} = \hat{D}' \hat{\beta} \dots\dots\dots(2.1.7)$$

persamaan (2.1.6) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + z \hat{\theta} + z' \hat{\Lambda} z$$

$$\text{atau} \quad \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\theta}_1 z_1 + \dots + \hat{\theta}_k z_k + \hat{\lambda}_1 z_1^2 + \dots + \hat{\lambda}_k z_k^2 \dots\dots\dots(2.1.8)$$

Persamaan (2.1.8) selanjutnya dinamakan dengan bentuk kanonik A, bentuk ini merupakan eliminasi faktor *cross product* dengan merotasikan sumbu. Dengan menurunkan persamaan (2.1.8) terhadap z_i didapatkan :

$$z_{is} = -\frac{\hat{\theta}_i}{2 \hat{\lambda}_i} \dots\dots\dots(2.1.9)$$

dimana z_{is} , $i = 1, 2, \dots, k$ merupakan koordinat titik stasioner berhubungan dengan sumbu yang dirotasikan.

Ukuran dan tanda aljabar dari $\hat{\lambda}_i$ menunjukkan tipe dari permukaan orde dua yang telah dicocokkan. $\hat{\theta}_i$ mengukur "*slopes*" dari permukaan pada x asli yaitu $x = 0$, dalam arah koordinat sumbu (yang telah dirotasikan) z_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Nilai z_{is} menunjukkan kedekatan sumbu kanonik terhadap titik stasioner S.

Contoh 2.1 : (Box and Draper, 1987, hal. 334-337)

Diberikan data suatu percobaan yang menghasilkan model orde dua yang telah dicocokkan sebagai berikut :

$$\hat{y} = 78.8988 + 2.272x_1 + 3.496x_2 - 2.08x_1^2 - 2.92x_2^2 - 2.88x_1x_2 \dots\dots\dots(2.1.10)$$

Dari persamaan (2.1.10) didapatkan

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 2.272 \\ 3.496 \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} -2.08 & -1.44 \\ -1.44 & -2.92 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian adalah $\hat{\lambda}_1 = -4, \hat{\lambda}_2 = -1$ dan

$$\hat{d}_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \hat{d}_2 = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}. \text{ Sehingga dapat dibentuk matrik } \hat{D} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix},$$

$$\text{dan } \hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Sementara itu } \hat{\theta} = \hat{D}^T \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.272 \\ 3.496 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.16 \\ 0.28 \end{bmatrix}, \text{ dan titik stasionernya}$$

$$\text{adalah } z_{1s} = \frac{4.16}{2x_1} = 0.52 \text{ dan } z_{2s} = \frac{0.28}{2x_1} = 0.14. \text{ Sehingga bentuk kanonik A dapat}$$

ditulis dengan :

$$\hat{y} = 78.8988 + 4.16z_1 + 0.28z_2 - 4z_1^2 - z_2^2 \dots\dots\dots(2.10.a)$$

dimana

$$z_1 = 0.6x_1 + 0.8x_2$$

$$z_2 = -0.8x_1 + 0.6x_2$$

2.4.2. Aplikasi Bentuk Kanonik A dan B. Widodo, 2000, (hal 10-14)

Untuk dua atau tiga peubah bebas ($k = 2$ atau 3) agak mudah untuk menginterpretasikan sifat dari sistem derajat dua, tapi untuk $k > 3$ menjadi lebih sulit. Analisis kanonik memungkinkan untuk menginterpretasikan sistem dengan $k > 3$.

Dalam unit rancangan, jarak dari pusat sistem (titik stasioner) S ke pusat rancangan O diberikan oleh

$$R = OS = \left\{ \sum_{i=1}^k x_{is}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{j=1}^k z_{js}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (2.1.16)$$

Selanjutnya jika S tertutup terhadap O (masing-masing dalam daerah percobaan), bentuk kanonik B yang sederhana cukup untuk dapat dipakai menginterpretasikan permukaan yang cocok. Namun demikian bilamana ada kemungkinan bahwa pusat sistem S yang cocok jauh dari pusat rancangan O , terutama untuk sistem *ridge*, analisis yang sesuai adalah bentuk kanonik A.

Sifat-sifat penting yang perlu diperhatikan dalam bentuk kanonik ini adalah berhubungan dengan interpretasi tanda dan arah relatif *nilai eigen* (λ_i).

Sifat-sifat tersebut adalah:

- a) Jika semua $\lambda_i < 0$, menunjukkan bahwa pergeseran ke berbagai arah dari titik stasioner mengakibatkan pengurangan pada nilai respon $\bar{y}$, sehingga dapat dikatakan bahwa titik stasionernya adalah maksimum.
- b) Jika semua $\lambda_i > 0$, menunjukkan bahwa pergeseran ke berbagai arah dari titik stasioner mengakibatkan penambahan pada nilai respon $\bar{y}$, sehingga dapat dikatakan bahwa titik stasionernya adalah minimum.

c) Jika λ_i berbeda tanda, artinya titik stasioner berbentuk titik sadel. Contohnya untuk $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 > 0$, pergeseran sepanjang sumbu W_1 dari titik stasioner mengakibatkan pengurangan $\hat{y}$, sebaliknya pergeseran dalam arah W_2 dari titik stasioner mengakibatkan penambahan $\hat{y}$.

d) Pengaruh besarnya nilai λ_i terhadap sistem. Sebagai contoh untuk $k = 2$, λ_1 dan λ_2 negatif, $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$, hal ini menunjukkan bahwa titik stasionernya maksimum, tetapi ada perbedaan sensitifitas respon menurut arah W_1 dan W_2 . Pergeseran sepanjang sumbu W_1 dari titik stasioner menyebabkan perubahan $\hat{y}$ yang lebih besar dibandingkan dengan pergeseran sepanjang sumbu W_2 . Untuk $k=3$, λ_1 dan λ_2 negatif tetapi tidak mendekati nol sedangkan λ_3 mendekati nol, hal ini menunjukkan bahwa $\hat{y}$ makin kecil apabila terjadi pergeseran titik yang menjauhi titik stasioner, tetapi apabila menjauhinya menurut arah W_3 perubahan harga $\hat{y}$ sangat kecil, hal ini berarti bahwa ada daerah sepanjang W_3 dengan $\hat{y}$ dekat dengan $\hat{y}$ maksimum.

Untuk dua keadaan diatas, titik stasioner ada disekitar rancangan percobaan yang digunakan untuk mencocokkan fungsi respon derajat dua. Sedangkan untuk titik stasioner yang tidak berada disekitar rancangan percobaan, sebagai contoh untuk $k=2$, dengan $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 = 0$, titik stasioner letaknya jauh di tak terhingga. Kondisi ini dinamakan dengan *exact rising ridge*.

Contoh 2.3 : Analisis kanonik untuk Data Elasticity Polimer (Box and Draper, 1987, hal. 3.07)

Andaikan respon Y menyatakan ukuran elasticity, dan 3 peubah penjelas Yaitu persentase konsentrasi C_1 dan C_2 serta temperatur reaksi T . Peubahnya dikodekan sebagai berikut :

$$x_1 = \frac{(C_1 - 18)}{3}, x_2 = \frac{(C_2 - 2.7)}{0.4}, x_3 = \frac{(T - 145)}{10}$$

Persamaan orde dua yang dicocokkan dan terletak di dekat daerah stasioner telah ditemukan yaitu :

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 57.31 + 1.50x_1 - 2.13x_2 + 1.81x_3 - 4.69x_1^2 \\ & - 6.27x_2^2 - 5.21x_3^2 - 7.13x_1x_2 - 3.27x_1x_3 - 2.73x_2x_3 \dots\dots\dots(2.1.17) \end{aligned}$$

Dari persamaan (2.1.17) diperoleh :

$$\hat{\beta}_0 = 57.31, \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 1.50 \\ -2.13 \\ 1.81 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4.690 & 3.565 & 1.635 \\ 3.565 & 6.270 & 1.365 \\ 1.635 & 1.365 & 5.210 \end{bmatrix}$$

Dan koordinat titik stasioner $x_s = -\frac{B^{-1}\hat{\beta}}{2} = (0.4063, -0.4645, 0.1509)'$. Dengan

estimai respon pada titik tersebut adalah $\hat{y}_s = \hat{\beta}_0 + \frac{x_s' \hat{\beta}}{2} = 58.29$. Jarak dari titik

stasioner S terhadap pusat rancangan adalah

$$R = OS = \left\{ \sum_{i=1}^k x_{si}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ (0.4063)^2 + (-0.4645)^2 + (0.1509)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0.6353$$

Karena $R < 1$, maka bisa dikatakan bahwa titik S tertutup terhadap pusat daerah percobaan, sehingga persamaan kanonik yang sesuai adalah bentuk kanonik B.

Nilai eigen absolut dalam arah yang berurutan, dan vektor eigen *ortonormal* yang berasosiasi ditampilkan sebagai berikut :

$\hat{\lambda}_j$	-10.0300	-4.3700	-1.7700
Vektor $\hat{d}_j$ yang	0.5899	0.1312	0.7967
bersesuaian($\hat{D}$)	0.7024	0.4034	-0.5865
	0.3983	-0.9056	-0.1458

Sehingga bentuk kanonik B yang sesuai adalah :

$$\hat{y} = 58.29 - 10.03W_1^2 - 4.3W_2^2 - 1.77W_3^2 \dots\dots\dots(2.1.19)$$

Dengan $W = D'w = D'(x - x_s)$,

$$\begin{aligned} W_1 &= 0.5899x_1 + 0.72024x_2 + 0.02649 \\ W_2 &= 0.1312x_1 + 0.4034x_2 - 0.9056x_3 + 0.2707 \dots\dots\dots(2.1.20) \\ W_3 &= 0.7967x_1 - 0.5865x_2 - 0.1458x_3 - 0.5741 \end{aligned}$$

Tanpa melihat plot konturnya, analisis kanonik ini bisa memberikan informasi penting, sebagai berikut :

1. Dari persamaan (2.1.18) pusat sistem yang sesuai, dekat dengan pusat percobaan (0, 0, 0).
2. Pada pusat, respon yang sesuai adalah $\hat{y} = 58.29$
3. Tanda negatif untuk masing-masing nilai eigen mengindikasikan bahwa respon 58.29 adalah permukaan yang maksimum.

4. Elemen-elemen vektor eigen, yang juga merupakan koefisien persamaan (2.1.20) dapat menyediakan informasi yang penting tentang hubungan antara peubah penjelas dan respon. Contohnya, koefisien dari vektor eigen yang berasosiasi dengan nilai eigen absolut yang paling kecil $\hat{\lambda} = -1.77$ adalah (90.7967, -0.5865, -0.1458). artinya bahwa dalam arah W_3 , yang merupakan arah elipsoid yang bentangnya terbesar, konsentrasi C_1 dan C_2 mempunyai pengganti yang luas.



BAB III

METODE PERMUKAAN RESPON

3.1. Dasar permukaan respon. *Sudjana, 1991, (hal 361-363)*

Bentuk umum permukaan respon

Perhatikan suatu eksperimen yang melibatkan k buah faktor (selanjutnya di sini disebut variabel bebas, prediktor atau kadang-kadang juga variabel kontrol). $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, dengan y (disebut juga variabel terikat, variabel tak bebas atau variabel respon). Untuk semua variabel ini dapat diukur dan diketahui atau barangkali diduga bahwa y sebagian atau seluruhnya merupakan respon dari $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, maka dikatakan bahwa y fungsi dari $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$.

Secara umum :

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) \dots \dots \dots (18)$$

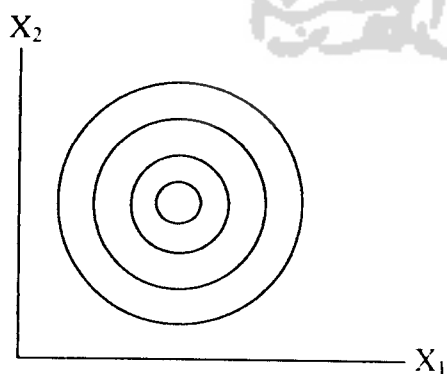
(Untuk $k = 1$, diperoleh $y = f(x_1)$ atau cukup ditulis $y = f(x)$, merupakan garis respon).

Permukaan respon ini secara grafik dapat digambarkan dalam ruang berdimensi $(k+1)$. Untuk $k = 2$ misalnya, jika x_1 menyatakan waktu lamanya mengaduk dan x_2 menyatakan temperatur waktu mengaduk sedangkan y hasil proses kimia dengan menggunakan kedua kegiatan tadi (x_1 dan x_2) maka secara umum diperoleh fungsi permukaan respon $y = f(x_1, x_2)$. Grafiknya dapat dilukiskan dalam ruang berdimensi tiga dengan mengambil absis x_1 , ordinat x_2 , dan sumbu y tegak

lurus pada bidang x_1, x_2 . Permukaan respon itu dapat digambarkan dengan membuat gambar dan grafik sebagai berikut.

Diambil permukaan respon $y = f(x_1, x_2)$, respon y karena prediktor x_1 dan x_2 . Jika $y = f(x_1, x_2)$ bentuknya digambarkan dalam ruang berdimensi tiga dan bentuk di potong datar, dan sejajar dengan bidang x_1, x_2 , maka pada bidang potong itu terjadi lengkungan (tertutup, terbuka atau terputus-putus bergantung pada bentuk $y = f(x_1, x_2)$ asalnya), disebut *kontur*.

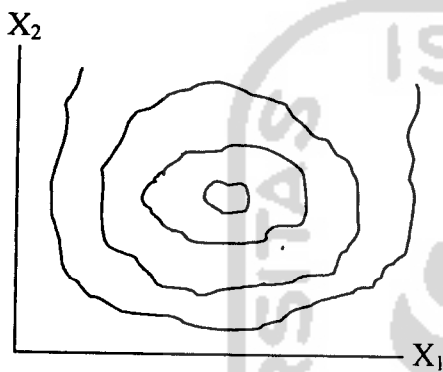
Dijelaskan dengan cara lain, kontur terbentuk jika titik-titik untuk semua harga y yang sama untuk tiap pasang harga x_1 dan x_2 yang dihubungkan. Jika bidang potong sejajar bidang x_1, x_2 dibuat lebih dari satu, akan diperoleh kontur-kontur dan melalui kontur-kontur inilah bentuk $y = f(x_1, x_2)$ di ruang berdimensi tiga. Sebagai contoh, jika kontur-kontur ini berupa lingkaran makin lama makin kecil, sedangkan pusatnya sama, maka bentuk $y = f(x_1, x_2)$ di ruang berdimensi tiga adalah kerucut yang dasarnya terletak pada bidang x_1, x_2 .



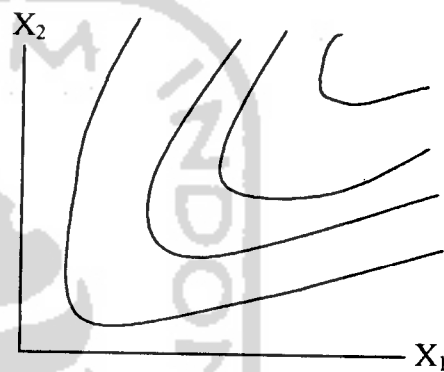
Gambar 1 Kontur Permukaan Respon : Lingkaran

Dari gambar 1 dapat dilihat permukaan respon berbentuk kerucut dengan dasar terletak pada bidang x_1, x_2 . Kontur berupa lingkaran.

Bentuk permukaan respon $y = f(x_1, x_2)$ di ruang berdimensi tiga bisa macam-macam, sehingga konturnya pun macam-macam. Beberapa diantaranya seperti tampak dibawah ini.



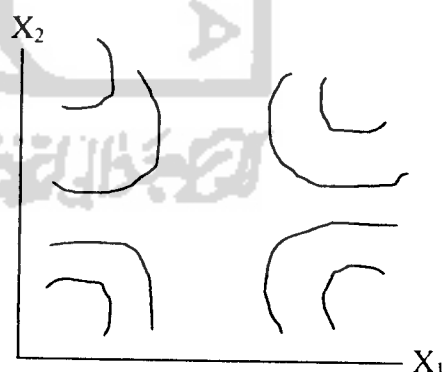
Gambar 2. Kontur Permukaan Respon :
Gundukan



Gambar 3. Kontur Permukaan Respon :
Depresi



Gambar 4. Kontur Permukaan Respon :
Bukit Timbul



Gambar 5. Kontur Permukaan Respon :
Pelana

Sumber gambar : Sudjana, (2002). Desain dan Analisis Eksperimen. Edisi Ke empat, Tarsito Bandung, Bandung, hal 362 – 363

Kegunaan permukaan respon dalam eksperimen :

1. Untuk menentukan, berdasarkan sebuah eksperimen, arah eksperimen berikutnya ke titik optimum.
2. Setelah ditemukan optimum atau hampir optimum pada permukaan respon, menentukan persamaan permukaan respon disekitar titik optimum ini.

3.2. Metode pendakian lintas tercuram. Sudjana, 1991, (hal 363-366)

Dasar kerjanya adalah melakukan sebuah eksperimen yang sederhana pada bagian permukaan respon yang luasnya kecil, yang untuk praktisnya bisa dianggap bidang. Kemudian ditentukan persamaan bidang dan setelah itu eksperimen harus diambil sedemikian rupa agar bergerak ke arah optimum atau sekitar optimum pada permukaan respon. Karena eksperimen berikutnya diharapkan harus bergerak dalam arah mendaki paling cepat menuju titik optimum atau dekat sekitar optimum pada permukaan respon, maka metode ini dinamakan *lintas pendakian tercuram*.

Untuk permukaan respon yang paling sederhana persamaan atau modelnya adalah

$$y = B_0 X_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + \varepsilon \dots \dots \dots (19)$$

Dengan pengertian y respon, X_0 harganya selalu diambil satu, X_1 dan X_2 masing-masing prediktor, B_0, B_1 dan B_2 nantinya ditaksir menggunakan metode kuadrat terkecil sehingga meminimalkan jumlah kuadrat-kuadrat kekeliruan ε .

Model diatas biasa disebut persamaan orde pertama mengingat pangkat prediktor (X_1 dan X_2) besarnya satu.



Jika model permukaan respon tidak berorde satu, maka harus diambil model berorde dua yang bentuk umumnya

$$y = B_0X_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_{11}X_1^2 + B_{12}X_1X_2 + B_{22}X_2^2 + \varepsilon \dots\dots\dots(20)$$

dengan pengertian tiap lambang seperti dijelaskan diatas dengan perluasan seperlunya. Suku X_1X_2 menunjukkan interaksi antara variabel-variabel X_1 dan X_2 .

Untuk keadaan berdimensi tiga, yakni respon y melibatkan tiga prediktor X_1, X_2 , dan X_3 , model permukaan respon berorde satu adalah

$$y = B_0X_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + \varepsilon \dots\dots\dots(21)$$

yang biasa disebut *bidang hyper*. Model berorde duanya adalah

$$y = B_0X_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 + B_{33}X_3^2 + B_{12}X_1X_2 + B_{13}X_1X_3 + B_{23}X_2X_3 + \varepsilon \dots\dots\dots(22)$$

dengan interaksi-interaksi antara X_1 dan X_2 , X_1 dan X_3 , X_2 dan X_3 .

Semua koefisien b dalam model-model diatas, nantinya ditaksir menggunakan metode kuadrat terkecil berdasarkan data hasil eksperimen.

” Bagaimana koefisien-koefisien B dalam suatu model ditaksir ?”

Ambil model $y = B_0X_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + \varepsilon$. Karena ada tiga parameter yang harus ditaksir, ialah B_0, B_1 dan B_2 , maka paling sedikit diperlukan tiga titik eksperimen. Desain yang diperlukan bisa berupa segitiga samakaki. Akan tetapi karena eksperimen melibatkan dua faktor X_1 dan X_2 , maka masing-masing faktor dapat dibuat dua taraf sehingga bisa digunakan desain faktorial 2^2 berupa desain bujur sangkar yang sudut-sudutnya dibentuk oleh titik-titik

X_1 taraf rendah dan X_2 taraf rendah

X_1 taraf rendah dan X_2 taraf tinggi

X_1 taraf tinggi dan X_2 taraf rendah

X_1 taraf tinggi dan X_2 taraf tinggi

Untuk menaksir B_0, B_1 dan B_2 sehingga nantinya diperoleh bidang perkiraan terbaik, seperti telah disebutkan, menggunakan metode kuadrat terkecil. Dengan meminimalkan jumlah kuadrat kekeliruan ε , yakni $\sum \varepsilon^2 = \sum (Y - B_0 X_0 - B_1 X_1 - B_2 X_2)^2$, menggunakan hitung differensial akan diperoleh sistem persamaan normal

$$(1) \dots \dots \dots \begin{cases} \sum X_0 = b_0 \sum X_0^2 + b_1 \sum X_0 X_1 + b_2 \sum X_0 X_2 \\ \sum X_1 Y = b_0 \sum X_0 X_1 + b_1 \sum X_1^2 + b_2 \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 Y = b_0 \sum X_0 X_2 + b_1 \sum X_1 X_2 + b_2 \sum X_2^2 \end{cases}$$

Untuk harga-harga data eksperimen yang diketahui, sistem persamaan diatas akan menghasilkan b_0, b_1 dan b_2 yang masing-masing sebagai taksiran B_0, B_1 dan B_2 .

Sistem persamaan diatas cukup memakan waktu untuk diselesaikan, sehingga sebaiknya digunakan dengan komputer. Akan tetapi dengan mengambil X_1 dan X_2 sebagai fungsi dari variabel eksperimen cocok dan dapat disusun X_1 dan X_2 menjadi berharga -1 dan $+1$ sehingga sistem persamaan diatas sangat disederhanakan dan X_1 dan X_2 membentuk sistem ortogonal, yakni bahwa $\sum X_1 = \sum X_2 = 0$ dan $\sum X_1 X_2 = 0$

Akibat adanya sistem ortogonal ini, maka sistem persamaan normal pada persamaan berubah menjadi :

$$(2) \dots \dots \dots \begin{cases} b_0 = \sum X_0 Y / n \\ b_1 = \sum X_1 Y / \sum X_1^2 \\ b_2 = \sum X_2 Y / \sum X_2^2 \end{cases}$$

Untuk menguji keberartian tiap koefisien perlu dicari jumlah kuadrat-kuadrat JK tiap koefisien yang dapat dihitung menggunakan

$$(3) \dots \dots \dots JK(b_i) = b_i \cdot \sum X_i Y$$

yang masing-masing memiliki derajat kebebasan satu.



BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1. Susunan Kerangka Kerja

Pada umumnya, diasumsikan optimasi adalah mengecilkan masalah. Dalam Metode Permukaan parameter model perencanaan selalu disebut faktor dimana hasil stokastik disebut respon model perencanaan.

Biasanya algoritma Metode Permukaan Respon berisi dua tingkat. Pertama: Fungsi permukaan respon memperkirakan perintah polinomial pertama, kemudian polinomial fitted itu menunjukkan signifikansinya kurang layak, atau tujuannya tidak membenarkan respon lainnya (Cochran dan Cox, 1962). Dalam tingkat kedua fungsi obyek memperkirakan kedua perintah polinomial (Fu 1994). Dalam basis perpanjangan variasi dan modifikasi algoritma klasik dapat mendasari literatur. Dikonstruksikan susunan kerangka kerja untuk mengoptimasi algoritma Metode Permukaan Respon dapat dilihat pada gambar 1.

Pada interaksi n , $n \geq 1$, kita mempertimbangkan sebagian kecil daerah yang disebut bagian penting dan diberi k -dimensi bujur sangkar.

$$[l_1'', u_1''] \times \dots \times [l_k'', u_k''] \dots \dots \dots (23)$$

daerah ini dapat dideskripsikan dengan titik pusat.

$$x_i^n = \frac{I_i^n + u_i^n}{2}, i = 1, \dots, k \dots \dots \dots (24)$$

keterangan :

k = banyak titik desain

n = banyak siklus

i = jumlah titik sampai ke-k

dan perhitungan selanjutnya

$$C_i^n = (u_i^n - I_i^n) / 2, i = 1, \dots, k \dots \dots \dots (25)$$

pada permukaan algoritma, mulanya berinisial titik dan diberi inisial ukuran langkah.

4.1.1. Model orde pertama

$$\text{Model pertama yaitu : } y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \varepsilon \dots \dots \dots (28)$$

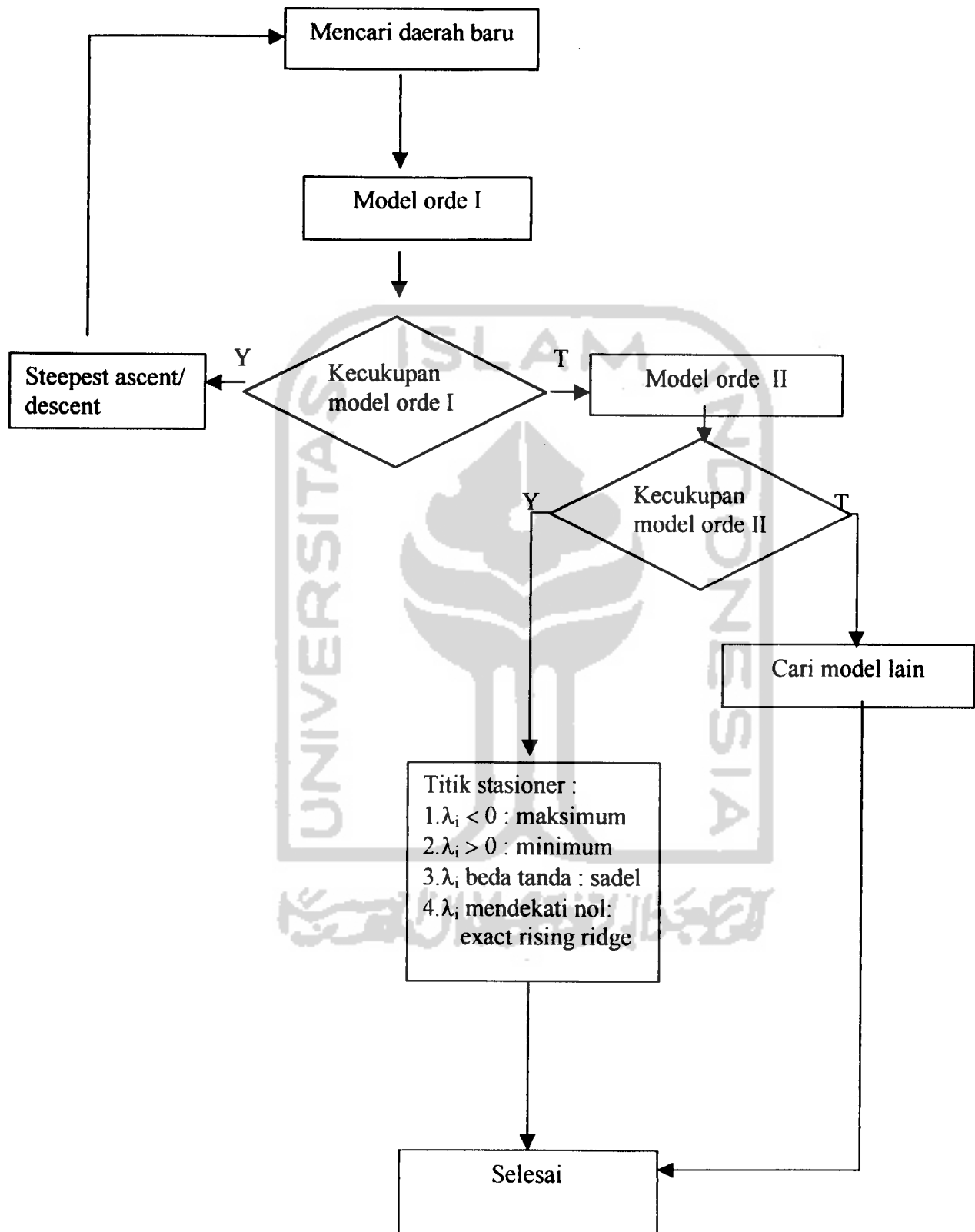
Diasumsikan error ε mempunyai distribusi normal dengan rata-rata 0 dan

$$\text{variansi tetap } \sigma^2. \text{ Distribusi normal : } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Faktor diberi tanda dengan kode variabel X_i

$$i = 1, \dots, k :$$

$$X_i = \frac{x_i - x_i^n}{c_i^n} \Rightarrow x_i = c_i^n x_i + x_i^n \dots \dots \dots (29)$$



Gambar 6. Susunan kerangka kerja optimasi algoritma RSM



Estimator untuk koefisien regresi $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k\}$ menggunakan OLS (Ordinary Least Square) dan dinotasikan $\{b_0, b_1, \dots, b_k\}$ dan fungsi obyektif ini adalah menentukan nilai pada titik rancangan percobaan yang spesifik pada titik wilayah edar. Percobaan ini adalah ortogonal, dimana arti variasi memprediksikan respon paling kecil dan koefisien regresi independen (Khuri dan Cornell 1996).

4.1.2. Memecahkan kecukupan model orde pertama.

Sebelum digunakan model pertama untuk tujuan respon yang benar, seharusnya dilakukan penelitian untuk menaksir kecukupan model pertama respon wilayah. Jika respon benar menunjukkan interaksi antara faktor atau kurva murni estimasi model orde pertama akan menunjukkan lack-of-fit yang dapat ditaksir dari analisis variansi (tabel ANOVA).

Tes untuk lack-of-fit digunakan untuk mengestimasi koefisien regresi yang tidak memenuhi model orde pertama.

Jika model orde pertama tidak baik, dan lainnya terdapat beberapa bukti kurva murni atau interaksi antara faktor pada wilayah peredaran, maka petunjuk turun pada direksi tidak dapat dilihat dari 0. Dapat dipecahkan permasalahan dengan memperkirakan fungsi perencanaan respon pada wilayah perhatian 2 orde polinomial. Alternatif solusi untuk mengurangi ukuran wilayah perhatian dengan pengurangan ukuran langkah $C'' = 1, \dots, k$.

4.1.3. Steepest ascent/descent.

Jika model orde pertama ternyata baik maka model ini digunakan untuk tujuan kemajuan taksiran perencanaan respon. Dalam direksi turun dapat ditulis

$(-b_1, \dots, -b_k)$. Dalam literatur Metode Permukaan Respon, garis permukaan digunakan (Box Drapper, 1987, Myers dan Montgomery 1995, Khuri dan Cornell 1996).

Pertama, yang bertambah/meningkat $(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$ sepanjang direksi turun yang terpilih dimana $\Delta_1 : \dots : \Delta_k = b_1 : \dots : b_k$ ini bertambah dan selalu tetap oleh pilihan subyek faktor yang lebih penting.

$$j = \arg \max_i = 1, \dots, k |b_i|$$

Dalam kedua kasus tambahan $\Delta_i = \frac{-b_i}{|b_j|}; i = 1, \dots, k$ (30)

Unit dalam kode variabel. Alat lain tambahan $(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$ jarak seimbang dari titik pusat untuk titik dalam seksi dari n tingkat direksi berasal dan diberi bulatan oleh.

$$\sum_{i=1}^k \Delta_i^2 = 1 \text{ (Neddermeijer et.al 1999)} \dots\dots\dots(31)$$

m th titik permukaan garis adalah $\{x_1'' + m\Delta_1 c_1'', \dots, x_k'' + m\Delta_k c_k''\}$ mengikuti inisial ukuran langkah. Untuk mengakhiri tipe ini garis permukaan dihentikan dengan garis yang dipilih.

Jika model orde pertama tidak baik, dan lainnya terdapat beberapa bukti kurva murni atau interaksi antara faktor pada wilayah peredaran, maka petunjuk turun pada direksi tidak dapat dilihat dari 0. Dapat dipecahkan permasalahan dengan memperkirakan fungsi perencanaan respon pada wilayah perhatian 2 orde polinomial. Alternatif solusi untuk mengurangi ukuran wilayah perhatian dengan pengurangan ukuran langkah $C_i'' = 1, \dots, k$.

4.1.5. Model orde kedua.

Kode model orde ke-2 adalah :

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \dots \dots \dots (32)$$

Koefisien regresi model orde kedua sekali lagi menyelidiki penggunaan OLS (Ordinary Least Square) untuk melakukan observasi dalam merancang percobaan. Rancangan orde kedua yang lebih terkenal adalah Central Composite Design (CCD) Myers dan Montgomery (1995). Perancangan ini dapat mudah dikonstruksi dengan memperbesar sebagian kecil rancangan faktorial yang digunakan untuk mengestimasi model orde pertama.

4.1.6. Memecahkan kecukupan model orde kedua.

Serupa dengan model orde pertama, model ini seharusnya juga diteliti, apakah taksiran model orde kedua cukup melukiskan / menggambarkan kelakuan respon ke dalam arus wilayah sebelum menggunakan model ini.

Jika model orde kedua tidak cukup mendasari maka dapat menurunkan ukuran wilayah (Joshi, Sherali dan Tew 1998) atau penambahan perencanaan ukuran menggunakan rancangan titik.

4.1.7. Melakukan analisis kanonik

Jika model orde ke-2 adalah dasar yang memadai, kemudian analisis kanonik dilakukan untuk determinan lokasi dan sifat titik tetap pada model orde kedua.

Perkiraan orde kedua dapat ditulis :

$$\hat{y} = \beta_0 + x'b + x'Bx \dots \dots \dots (33)$$

dimana

$$b = (b_1, \dots, b_k)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2}/2 & \dots & b_{1,k}/2 \\ & b_{2,2} & \dots & b_{2,k}/2 \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{sym} & & & b_{k,k} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (34)$$

dan titik stasioner s oleh polinomial orde ke-2 adalah determinan dari

$$s = -\frac{1}{2}B^{-1}b \dots\dots\dots(35)$$

$$\hat{Y}_0 = b_0 + \frac{1}{2}x_0'b \dots\dots\dots(36)$$

Dengan cara transformasi, maka dapat dituliskan bentuk fungsi respons dalam variabel kanonik, sebagai berikut :

$$\hat{Y} = \hat{Y}_0 + \lambda_1 W_1^2 + \lambda_2 W_2^2 + \dots\dots\dots + \lambda_k W_k^2 \dots\dots\dots(37)$$

dimana :

$\hat{Y}$ = variabel respons.

$\hat{Y}_0$ = respons yang diduga pada titik stasioner $X_0 = -\frac{1}{2}B^{-1}b$

W = variabel bebas yang telah mengalami transformasi, sering disebut sebagai bentuk kanonik.

λ = konstanta, yang tidak lain merupakan akar ciri (eigen values) dari matriks B.

Proses transformasi permukaan respons ke dalam bentuk kanonik ini yang dinamakan analisis kanonik dengan persamaan fungsi kanonik pada persamaan (37) yang disebut sebagai bentuk kanonik dari model.

E matrik normal eigen vektor B dan $v_1, \dots, v_k$ eigen value B. Jika semua nilai eigen positif, titik stasionernya minimum, bilamana semua nilai eigen negatif, titik stasionernya maksimum. Jika nilai eigen mempunyai tanda yang berbeda, mengindikasikan titik sadel. Dan bilamana nilai eigen nol atau identik atau dekat dengan nol mengindikasikan bahwa dalam respon permukaannya mengandung *ridge*.

percobaan seorang peneliti yang ingin menentukan kondisi operasi yang memaksimumkan hasil dari suatu proses kimiawi. Dua variabel yang mempengaruhi hasil proses yaitu waktu reaksi (W) dan temperatur reaksi (T). Peneliti saat ini bekerja dengan kondisi operasi waktu reaksi 35 menit dan temperatur 155⁰F dan pada kondisi ini hanya menghasilkan respons sekitar 40 persen dan diketahui bukan merupakan respons yang optimum. Oleh karena itu ia ingin mencari daerah operasi yang optimum dengan menggunakan prosedur metode dakian tercuram. Peneliti itu memutuskan untuk menetapkan daerah eksplorasi guna membangun model fungsi respons orde pertama pada titik-titik sekitar daerah operasi saat ini. Oleh karena itu ia menetapkan daerah percobaan awal pada taraf dari faktor waktu reaksi 30 menit dan 40 menit (dua taraf kuantitatif), serta taraf faktor temperatur reaksi 150⁰F dan 160⁰F (dua taraf faktor T). Untuk mengumpulkan data, maka ia menggunakan percobaan faktorial 2x2 atau 2² yang diperluas dengan 5 titik pusat, di mana sebagai titik pusatnya adalah pada taraf waktu reaksi (W) 35 menit dan taraf temperatur reaksi (T) 155⁰F. Dengan demikian sebagai titik pusat adalah (W = 35 menit, T = 155⁰F) atau apabila dinyatakan dalam variabel kode menjadi ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$). Pengulangan pengamatan pada titik pusat dimaksudkan untuk menduga galat percobaan serta memeriksa ketepatan model orde pertama. Tabel data percobaan dapat dilihat pada lampiran 1.

Susunan kerangka kerja Metode Permukaan Respon untuk perencanaan optimalisasi dengan menggunakan kasus diatas penghitungannya menggunakan program *Minitab* dan pengujian koefisien regresi secara parsial dengan program *SPSS versi 10*.

1. Model orde pertama.

Model orde pertama yang dirumuskan peneliti adalah

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon \quad \dots\dots\dots(41)$$

dimana :

Y = respons hasil proses kimiawi

X_1 = variabel kode untuk waktu reaksi

X_2 = variabel kode untuk temperatur reaksi

ε = komponen galat (error component)

Dari lampiran 2. tampak bahwa variabel X_1 dan X_2 bersifat ortogonal, dimana

$$\sum X_1 = 0, \sum X_2 = 0, \text{ serta } \sum X_1 X_2 = 0.$$

Sehingga dapat ditentukan persamaan dugaan model orde pertama, sebagai berikut:

$$\hat{Y} = 40.444 + 0.775 X_1 + 0.325 X_2 \quad \dots\dots\dots(42)$$

2. Memecahkan kecukupan model orde pertama.

Selanjutnya diperiksa kecukupan model orde pertama berdasarkan data percobaan untuk mengetahui apakah model orde pertama cukup diandalkan bagi

penetapan lintasan dakian tercuram guna mencari titik-titik kondisi operasi yang optimum. Pemeriksaan model orde pertama adalah serupa dengan pemeriksaan model regresi, karena pada dasarnya model polinomial adalah merupakan model regresi.

Regression Analysis

The regression equation is
 $C3 = 40.4 + 0.774 C1 + 0.324 C2$

Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	40.4449	0.0573	705.80	0.000
C1	0.77442	0.08598	9.01	0.000
C2	0.32436	0.08597	3.77	0.009

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	2.8250	1.4125	47.88	0.000
Error	6	0.1772	0.0295		
Total	8	3.0022			

Source	DF	Seq SS
C1	1	96.903
C2	1	17.012

Lack of fit ($P > 0.05$)

$F = 0.06$ $P = 0.9406$ $DF = 4$

Uji lack-of-fit

H_0 : Tidak ada lack-of-fit.

H_1 : Ada lack-of-fit.

Tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$

Daerah penolakan hipotesis dengan $\alpha = 0.05$

$$F_{hitung} < F_{0.05(2,4)}$$

$$F_{hitung} < 6.94$$

Keputusan :

Mengingat $F_{hitung} = 0.06 < F_{0.05(2,4)} = 6.94$, maka H_0 ditolak.

Kesimpulan :

Dari hasil pengujian Anova lack-of-fit tidak signifikan.

Uji persamaan regresi keseluruhan

H_0 : Regresi tidak signifikan.

H_1 : Regresi signifikan.

Tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$

Daerah penolakan hipotesis dengan $\alpha = 0.05$

$$F_{hitung} < F_{0.05(2,6)}$$

$$F_{hitung} < 5.14$$

Keputusan :

Mengingat $F_{hitung} = 47.88 > F_{0.05(2,6)} = 5.14$, maka H_0 diterima.

Kesimpulan :

Dari hasil pengujian Anova Regresi signifikan.

Dari uji lack-of-fit dan regresi dapat disimpulkan bahwa model merupakan pendekatan yang cukup untuk permukaan.

Berdasarkan kesimpulan, maka persamaan regresi (41) dapat dipergunakan untuk menentukan lintasan dakian tercuram.

3. Steepest ascent/descent.

Model orde pertama yang dianggap tepat adalah sebagai berikut :

$$\hat{Y} = 40.444 + 0.775X_1 + 0.325X_2 \quad (42)$$

Untuk menentukan arah lintasan dakian tercuram, dimulai dari titik pusat

$(X_1 = 0, X_2 = 0)$, kemudian berdasarkan persamaan regresi diketahui bahwa arah X_1 dan X_2 bersifat positif (menaik) serta besarnya koefisien arah untuk X_1 adalah 0.775 dan koefisien arah X_2 adalah 0.325. Dengan demikian diketahui bahwa lintasan dakian tercuram ("mendaki") dengan gerakan sebesar 0.775 unit dalam arah X_1

untuk setiap 0.325 unit dalam arah X_2 . Dengan demikian diketahui bahwa lintasan dakian tercuram akan melalui titik pusat ($X_1 = 0$, $X_2 = 0$) dengan slope sebesar $0.325/0.775$. Dalam kasus ini, misalkan peneliti menggunakan jarak (interval) di antara taraf variabel W sebagai ukuran langkah dasar. Penetapan 5 menit dari waktu reaksi (W) adalah ekuivalen dengan langkah dalam X_1 sebesar $\Delta X_1 = 1$. Dengan demikian langkah-langkah sepanjang lintasan dakian tercuram adalah ΔX_1 dan $\Delta X_2 = (0.335/0.775) \Delta X_1 = (0.335/0.775)(1) = 0.4194$.

Dengan demikian ditetapkan $\Delta X_1 = 1.0000$ dan $\Delta X_2 = 0.4194$, kemudian dihitung titik-titik sepanjang lintasan serta mengamati hasil pada titik tersebut sampai ditemukan bahwa terjadi penurunan dalam hasil apabila “pendakian” dilakukan terus.

Hasil eksplorasi sepanjang lintasan dakian tercuram dengan menggunakan $\Delta X_1 = 1.0000$ dan $\Delta X_2 = 0.4194$. Pada lampiran 3. merupakan data percobaan dakian tercuram.

Dari lampiran 3. dapat dikemukakan variabel kode X_1 dan X_2 serta variabel asli W dan T , di mana variabel kode dipergunakan untuk memudahkan manipulasi matematik, sedangkan variabel asli W dan T harus digunakan dalam menjalankan proses percobaan sampai ditemukan hasil respons yang menurun (tidak meningkat lagi). Berdasarkan percobaan dakian tercuram, tampak bahwa peningkatan respons Y teramati sepanjang 10 langkah dakian tercuram, sementara pada langkah ke-11 telah terjadi penurunan respons Y . Hal ini berarti bahwa daerah optimum berada disekitar titik-titik $X_1 = 10.0000$ dan $X_2 = 4.1940$ atau di sekitar titik-titik $W = 85$ menit dan $T = 175^\circ\text{F}$. Dengan demikian tampak bahwa metode dakian tercuram dapat

dipergunakan untuk mencari daerah yang berada disekitar kondisi operasi yang optimum, guna membantu dalam merancang percobaan selanjutnya.

4. Model orde kedua.

Fungsi respons orde kedua dibangun dengan menggunakan rancangan komposit pusat (central composite design) untuk mengumpulkan data percobaan. Dalam kasus percobaan kimiawi, karena banyaknya variabel yang dicobakan ada dua ($k = 2$), yaitu variabel X_1 yang mewakili faktor waktu reaksi (W) dan variabel X_2 yang mewakili temperatur reaksi (T) maka diperoleh

Central Composite Design

Central Composite Design

Factors: 2	Blocks: none	Center points: 5
Runs: 13	Alpha: 1.414	

Dengan $\alpha = 1.414$ dan pengulangan pengamatan sebanyak 5 kali pada titik pusat ($X_1 = 0, X_2 = 0$) atau dengan rumus

$$\alpha = 2^{k/4} \quad ; \text{ untuk ulangan penuh}$$

$$\alpha = 2^{(k-1)/4} \quad ; \text{ untuk setengah ulangan}$$

maka ditetapkan $\alpha = 2^{k/4} = 2^{2/4} = 1.414$.

Kemudian agar model polinomial orde kedua yang dibangun dapat diperiksa ketepatan modelnya, maka perlu melakukan pengulangan pengamatan, dan dalam

kasus ini dipilih pengulangan pengamatan sebanyak 5 kali pada titik pusat ($X_1 = 0$, $X_2 = 0$) sedangkan pada titik-titik yang lain tidak dilakukan pengulangan pengamatan. Pada percobaan awal ditetapkan titik pusat $W = 35$ menit dan $T = 155^\circ\text{F}$, namun berdasarkan percobaan darian tercuram pada tabel 2. ditetapkan $W = 85$ menit dan $T = 175^\circ\text{F}$. Maka

$$X_1 = \frac{W - 85}{5} \text{ atau } W = 5X_1 + 85 \dots\dots\dots(43)$$

$$X_2 = \frac{T - 175}{5} \text{ atau } T = 5X_2 + 175 \dots\dots\dots(44)$$

Rancangan komposit pusat dipergunakan untuk membangkitkan data guna menduga model orde kedua dan dirumuskan sebagai berikut :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon \dots\dots\dots(45)$$

dimana :

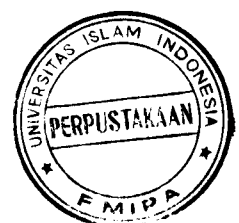
Y = variabel respons hasil proses kimiawi

X_1 = variabel bebas kode untuk waktu reaksi

X_2 = variabel bebas kode untuk temperatur reaksi

ε = komponen galat (error component)

Kemudian dilakukan pendugaaan parameter model orde kedua dengan menggunakan prinsip metode kuadrat terkecil.



Maka diperoleh persamaan dugaan orde kedua sebagai berikut :

$$\hat{Y} = 79.93995 + 0.99505X_1 + 0.51520X_2 - 1.37645X_1^2 - 1.00134X_2^2 + 0.25000X_1X_2$$

.....(46)

5. Memecahkan kecukupan model orde kedua

Model orde kedua diuji dengan lack-of-fit dan analisis regresi untuk mendapatkan pendekatan yang cukup atau tidak cukup untuk permukaan.

Regression

The regression equation is

$$C6 = 79.9 + 0.995 C1 + 0.515 C2 - 1.38 C3 - 1.00 C4 + 0.250 C5$$

Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	79.9405	0.1182	676.40	0.000
C1	0.99505	0.09499	10.48	0.000
C2	0.51517	0.09475	5.44	0.000
C3	-1.3762	0.1014	-13.57	0.000
C4	-1.0018	0.1012	-9.90	0.000
C5	0.2504	0.1340	1.87	0.104

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	5	28.2463	5.6493	79.57	0.000
Error	7	0.4968	5.58		
Total	12	28.7431			

Source	DF	Seq SS
C1	1	597.11
C2	1	162.96
C3	1	868.68
C4	1	547.13
C5	1	19.50

lack of fit ($P > 0.05$)

$F = 1.74$ $P = 0.2975$ $DF = 4$

Pengujian koefisien regresi secara parsial dengan program SPSS versi 10

Regression

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	79.940	.119		670.786	.000
	X1	.995	.094	.525	10.561	.000
	X2	.515	.094	.272	5.468	.001
	X3	-1.377	.101	-.683	-13.620	.000
	X4	-1.001	.101	-.497	-9.908	.000
	X5	.250	.133	.093	1.876	.103

a. Dependent Variable: X6

Uji koefisien regresi

H_0 : Koefisien regresi tidak signifikan.

H_1 : Koefisien regresi signifikan .

Tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$

Daerah penolakan hipotesis dengan $\alpha = 0.05$

Keputusan :

$t_{hitung} < t_{tabel}$, maka H_0 diterima.

$t_{hitung} \geq t_{tabel}$, maka H_0 ditolak.

Kesimpulan :

Dari hasil pengujian dalam Anova diatas untuk x_1 $t_{hitung} = 10.561 > t_{tabel} = 2.365$

maka H_0 ditolak yang berarti koefisien regresi signifikan, untuk x_2 $t_{hitung} = 5.468$

$> t_{\text{tabel}} = 2.365$ maka H_0 ditolak yang berarti koefisien regresi signifikan, untuk x_3 $t_{\text{hitung}} = -13.620 < t_{\text{tabel}} = 2.365$ maka H_0 diterima yang berarti koefisien regresi tidak signifikan, untuk x_4 $t_{\text{hitung}} = -9.908 < t_{\text{tabel}} = 2.365$ maka H_0 diterima yang berarti koefisien regresi tidak signifikan, untuk x_5 $t_{\text{hitung}} = 1.876 < t_{\text{tabel}} = 2.365$ maka H_0 diterima yang berarti koefisien regresi tidak signifikan.

Uji lack-of-fit

H_0 : Tidak ada lack-of-fit.

H_1 : Ada lack-of-fit.

Tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$

Daerah penolakan hipotesis dengan $\alpha = 0.05$

$F_{\text{hitung}} < F_{0.05(2,4)}$

$F_{\text{hitung}} < 6.94$

Keputusan :

Mengingat $F_{\text{hitung}} = 1.74 < F_{0.05(2,4)} = 6.94$, maka H_0 ditolak.

Kesimpulan :

Dari hasil pengujian Anova lack-of-fit tidak signifikan.

Uji persamaan regresi keseluruhan

H_0 : Regresi tidak signifikan.

H_1 : Regresi signifikan.

Tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$

Daerah penolakan hipotesis dengan $\alpha = 0.05$

$$F_{hitung} < F_{0.05(5,7)}$$

$$F_{hitung} < 3.97$$

Keputusan :

Mengingat $F_{hitung} = 78.65 > F_{0.05(5,7)} = 3.97$, maka H_0 diterima.

Kesimpulan :

Dari hasil pengujian Anova Regresi signifikan.

Dari uji lack-of-fit dan regresi dapat disimpulkan bahwa model merupakan pendekatan yang cukup untuk permukaan, maka model orde kedua merupakan model yang tepat untuk menerangkan kasus percobaan kimiawi pada kasus diatas.

6. Melakukan analisis kanonik

Model orde kedua :

$$\hat{Y} = 79.93995 + 0.99505X_1 + 0.51520X_2 - 1.37645X_1^2 - 1.00134X_2^2 + 0.25000X_1X_2$$

.....(46)

Persamaan ini diketahui merupakan model yang tepat untuk menerangkan pengaruh waktu reaksi dan temperatur reaksi terhadap respons hasil proses yang telah diuji kecukupannya.

Sesuai dengan persamaan matriks, maka dapat ditulis kembali bentuk persamaan regresi kuadratik (orde kedua) yang diperoleh, sebagai berikut :

$$\hat{Y} = 79.93995 + X'b + X'BX$$

dimana

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 0.99505 \\ 0.51520 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -1.37645 & 0.12500 \\ 0.12500 & -1.00134 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (35), maka dapat ditentukan titik stasioner, sebagai berikut :

$$\begin{aligned} s &= -\frac{1}{2}B^{-1}b \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -0.73484 & -0.09173 \\ -0.09173 & -1.01001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.99505 \\ 0.51520 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3892 \\ 0.3058 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dengan demikian diketahui bahwa titik stasioner adalah :

$X_{1,0} = 0.3892$ dan $X_{2,0} = 0.3058$. Selanjutnya dengan memanfaatkan hubungan yang ada di antara X_1 dan W serta X_2 dan T dalam persamaan (43) dan (44), maka dapat ditentukan titik stasioner dalam bentuk variabel asli, yaitu :

$$W = 5 (0.3892) + 85 = 86.9460$$

$$T = 5 (0.3058) + 175 = 176.5290$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (36), maka dapat diduga respons pada titik stasioner $X_{1,0} = 0.3892$ dan $X_{2,0} = 0.3058$, sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_0 &= b_0 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0.3892 & 0.3058 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.99505 \\ 0.51520 \end{bmatrix} \\ &= 80.2 \end{aligned}$$

Untuk mengetahui apakah titik stasioner merupakan titik dari respons maksimum, maka dibentuk kanonik (37). Akar ciri λ_1 dan λ_2 merupakan akar ciri dari persamaan determinan matriks B, sebagai berikut :

$$\text{Det}(B - \lambda I) = 0$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} -1.37645 & 0.12500 \\ 0.12500 & -1.00134 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Det} \begin{vmatrix} -1.37645 - \lambda & 0.12500 \\ 0.12500 & -1.00134 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1.37645 - \lambda)(-1.00134 - \lambda) - (0.12500)(0.12500) = 0$$

$$\lambda^2 + 2.37779\lambda + 1.36267 = 0$$

Dengan rumus ABC, maka dapat ditentukan akar-akar ciri dari persamaan kuadrat, yaitu :

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-2.3779 \pm \sqrt{(2.3779)^2 - 4(1)(1.36267)}}{2(1)}$$

$$\lambda_1 = \frac{-2.37779 + 0.45078}{2} = -0.9635$$

$$\lambda_2 = \frac{-2.37779 - 0.45078}{2} = -1.4143$$

Kemudian didapatkan persamaan respons dalam bentuk kanonik mengikuti persamaan (37) sebagai berikut :

$$\hat{Y} = \hat{Y}_0 + \lambda_1 W_1^2 + \lambda_2 W_2^2$$

$$\hat{Y} = 80.2 - 0.9635 W_1^2 - 1.4143 W_2^2$$

9. Analisis Ridge

Dari hasil analisis kanonik diatas dinyatakan bahwa nilai $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ tidak mendekati nol, maka sistem sensitif terhadap variabel kanonik W_i dan dapat disimpulkan bahwa tidak ada ridge stasioner (*stasionery ridge*).

10. Penerimaan nilai titik stasioner

Oleh karena λ_1 dan λ_2 keduanya negatif serta tidak mendekati nol, maka dapat disimpulkan bahwa titik stasioner $X_{1,0} = 0.3892$ dan $X_{2,0} = 0.3058$ merupakan titik dari respons maksimum. Berdasarkan analisis kanonik dapat disimpulkan bahwa respons maksimum sebesar 0.82 persen akan tercapai pada kondisi operasi waktu reaksi $W = 86.9$ menit serta temperatur reaksi 176.5°F .

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Dalam skripsi ini telah diuraikan susunan kerangka kerja Metode Permukaan Respon untuk perencanaan optimalisasi. Metode Permukaan Respon ini sering digunakan untuk mencari kondisi peubah bebas yang menghasilkan respon optimum (maksimum, minimum atau lebih luas lagi, mencari kondisi disekitar titik stasioner yang mengandung ridge). Untuk mendekati hubungan antara peubah respon dan peubah bebas pada daerah asal yang terbatas digunakan fungsi polinomial orde dua. Model ini selanjutnya disebut dengan model orde dua.

Permukaan respon tersebut dapat diinterpretasikan dengan membentuk analisis kanonik. Dari analisis kanonik pengguna Metode Permukaan Respon dapat memperoleh informasi tentang sifat dasar titik stasioner dan sistem respon dari nilai eigen B.

5.2. Saran-saran

Dalam penelitian-penelitian yang lain dianjurkan untuk menggunakan susunan kerangka kerja Metode Permukaan Respon untuk perencanaan optimalisasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Algifari, (1997), *Analisis Regresi, Teori, Kasus dan Solusi*, Edisi Pertama, PBFYogyakarta, Yogyakarta.
- Anton, Howard, (1987), *Aljabar Linear Elementer*, Edisi Ke lima, Erlangga, Jakarta.
- Gaspersz, Vincent, (1995), *Teknik Analisis Dalam Penelitian Percobaan*, Edisi Pertama, Tarsito Bandung, Bandung.
- Gaspersz, Vincent, (1995), *Teknik Analisis Dalam Penelitian Percobaan*, Edisi Ke dua, Tarsito Bandung, Bandung.
- Neddermeijer, Gonda, Oortmarssen, Gerrit, Piersma, Nanda, Dekker, Rommert, (2000), *A Framework for response surface methodology for simulation optimization* Journal of statistics, proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference, Joines, Barton, Kang, and Fishwick, eds.
- Simatupang, Togar, (1994), *Pemodelan Sistem*, Studio Manajemen Jurusan Teknik Industri, Institut Teknologi Bandung, Bandung.
- Smith, Draper, *Applied Regression Analysis*, Second Edition, John Wiley & Sons. Inc, New York.
- Sudjana, (2002), *Desain Dan Analisis Eksperimen*, Edisi Ke empat, Tarsito Bandung, Bandung.
- Widodo, Edy, (2000), Tesis : *Pendekatan Selang Kepercayaan Untuk Nilai Eigen Pada Model Permukaan Respon Orde Dua Dengan Metode Regresi Linear* Ganda, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

LAMPIRAN



Lampiran 1

Tabel 1 : Tabel Data Percobaan untuk Membangun Model Fungsi Respons Orde Pertama.

Waktu reaksi (W) (menit)	Temperatur Reaksi (T) (°C)	Respons (Y) (%)
30	150	39.3
30	160	40.0
40	150	40.9
40	160	41.5
35	155	40.3
35	155	40.5
35	155	40.7
35	155	40.2
35	155	40.6

Sumber : Gaspersz, Vincent, (1995), *Teknik Analisis dalam Penelitian Percobaan*, Tarsito Bandung, Bandung, hal : 211.

Lampiran 2

Tabel 2 : Variabel-variabel Kode serta Respons Hasil Percobaan yang telah ditransformasi dari tabel 1.

Waktu reaksi (W) (menit)	Temperatur Reaksi (T) (°C)	Respons (Y)
-1.16586	-1.16586	39.3
-1.16586	1.16586	40.0
1.16586	-1.16586	40.9
1.16586	1.16586	41.5
0.00000	0.00000	40.3
0.00000	0.00000	40.5
0.00000	0.00000	40.7
0.00000	0.00000	40.2
0.00000	0.00000	40.6

Lampiran 3

Tabel 3. Percobaan Dakian Tercuram.

Langkah-langkah	X_1	X_2	W (menit)	T (°C)	Respons yang diamati (Y) (%)
Basis	0	0	35	155	-
Δ	1.0000	0.4194	5	2.097	
Basis + Δ	1.0000	0.4194	40	157.097	41.0
Basis + 2 Δ	2.0000	0.8388	45	159.194	41.9
Basis + 3 Δ	3.0000	1.2582	50	161.291	43.1
.	.	.	.	.	.
Basis + 10 Δ	10.0000	4.1940	85	175.970	80.3
Basis + 11 Δ	11.0000	4.6134	90	178.067	79.2

Sumber : Gaspersz, Vincent, (1995), *Teknik Analisis dalam Penelitian Percobaan*, Tarsito Bandung, Bandung, hal : 217.

Keterangan :

1. Berdasarkan persamaan Berdasarkan $X_1 = \frac{W - 35}{5}$ maka terdapat hubungan antara W dan X_1 yaitu $W = 5X_1 + 35$.
2. Berdasarkan $X_2 = \frac{T - 155}{5}$ maka terdapat hubungan antara T dan X_2 , yaitu $T = 5X_2 + 155$.
3. Respons Y merupakan nilai pengamatan aktual pada titik-titik temperatur dan waktu reaksi tertentu.

Lampiran 4

Tabel 4. Data Percobaan Menggunakan Rancangan Komposit Pusat.

Variabel Kode		Variabel Asli		Respons
X_1	X_2	W (menit)	T (°K)	Y (%)
-1	-1	80	170	76.5
-1	1	80	180	77.0
1	-1	90	170	78.0
1	1	90	180	79.5
0	0	85	175	79.9
0	0	85	175	80.3
0	0	85	175	80.0
0	0	85	175	79.7
0	0	85	175	79.8
-1.414	0	77.93	175	75.6
1.414	0	92.07	175	78.4
0	-1.414	85	167.93	77.0
0	1.414	85	182.07	78.5

Sumber : Gaspersz, Vincent, (1995), *Teknik Analisis dalam Penelitian Percobaan*, Tarsito Bandung, Bandung, hal : 221.

Keterangan :

1. Berdasarkan persamaan $X_1 = \frac{W - 85}{5}$ maka terdapat hubungan antara W dan X_1 yaitu

$$W = 5X_1 + 85.$$

2. Berdasarkan $X_2 = \frac{T - 175}{5}$ maka terdapat hubungan antara T dan X_2 , yaitu $T = 5X_2 + 175$

3. Respons Y adalah pengamatan aktual pada titik-titik W dan T yang ditetapkan berdasarkan sifat rancangan komposit pusat untuk $k = 2$

Lampiran 5

Tabel 5. Data untuk Menduga Model Orde Kedua.

No	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	Y
1	-1	-1	1	1	1	76.5
2	-1	1	1	1	-1	77.0
3	1	-1	1	1	-1	78.0
4	1	0	1	1	0	79.5
5	0	0	0	0	0	79.9
6	0	0	0	0	0	80.3
7	0	0	0	0	0	80.0
8	0	0	0	0	0	79.7
9	0	0	0	0	0	79.8
10	-1.414	0	1.999	0	0	75.6
11	1.414	0	1.999	0	0	78.4
12	0	-1.414	0	1.999	0	77.0
13	0	1.414	0	1.999	0	78.5

Sumber : Gaspersz, Vincent, (1995), *Teknik Analisis dalam Penelitian Percobaan*, Tarsito Bandung, Bandung, hal : 223.

Lampiran 4. Distribusi F

Tabel 5. Distribusi F

Denominator d_f	Probability of a larger F	Numerator d_f								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.100	39.86	49.50	55.59	58.03	59.24	59.80	59.91	59.94	59.96
	.050	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5
	.025	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3
	.010	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5920	5962	6022
	.005	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091
2	.100	8.33	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.050	18.31	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
	.025	30.51	31.00	31.17	31.25	31.30	31.33	31.35	31.37	31.38
	.010	911.50	919.00	921.7	923.5	924.4	925.1	925.6	926.0	926.3
	.005	1911.5	1920.0	1922.2	1923.2	1924.0	1924.6	1925.0	1925.3	1925.5
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.80	14.53	14.32	14.14	14.00
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
	.005	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.81	44.43	44.13	43.88
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.025	12.22	10.63	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	.010	21.20	18.00	16.69	15.90	15.52	15.21	14.90	14.60	14.46
	.005	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
	.005	22.78	18.31	16.53	15.36	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77
6	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.025	8.01	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.005	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39
7	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.005	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51
8	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
	.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.005	14.69	11.01	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34
9	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
	.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
	.005	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.51
10	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.38	5.20	5.06	4.94
	.005	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.51	6.26	6.12	5.97
11	.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
	.050	4.81	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59
	.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
	.005	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54
12	.100	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80
	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
	.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.005	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20
13	.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.29	2.24	2.20	2.16
	.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
	.025	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.61	3.49	3.39	3.31
	.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
	.005	11.37	8.19	6.93	6.21	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94
14	.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
	.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
	.025	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21
	.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.45	4.27	4.14	4.03
	.005	11.06	7.92	6.66	5.95	5.55	5.25	5.03	4.86	4.72

Lampiran 2. Distribusi t-Student (t_{0.0})

n	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.05	.02	.01	.001
1	.158	.325	.510	.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.142	.289	.445	.617	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.593
3	.137	.277	.424	.584	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	.134	.271	.414	.569	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.132	.267	.408	.559	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	.131	.265	.404	.553	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.130	.263	.402	.549	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	.130	.262	.399	.546	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.129	.261	.398	.543	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.129	.260	.397	.542	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.129	.260	.396	.540	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.128	.259	.395	.539	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.128	.259	.394	.538	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.128	.258	.393	.537	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.128	.258	.393	.536	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.128	.258	.392	.535	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.127	.257	.392	.534	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.127	.257	.392	.534	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.127	.257	.391	.533	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.127	.257	.391	.533	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.127	.257	.391	.532	.686	.859	1.053	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.127	.256	.390	.532	.686	.858	1.051	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.127	.256	.390	.532	.685	.858	1.050	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.127	.256	.390	.531	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.055	2.479	2.779	3.707
27	.127	.256	.389	.531	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.127	.256	.389	.530	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.127	.255	.389	.530	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.126	.255	.388	.529	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.126	.254	.387	.527	.679	.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.126	.254	.386	.526	.677	.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.126	.253	.385	.524	.674	.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Reproduced from STATISTICAL TABLES FOR BIOLOGICAL, AGRICULTURAL AND MEDICAL RESEARCH by R.A. Fisher and F. Yates, sixth edition 1963.
Reprinted by permission of Longman Group Limited, Essex, England